

# Nullstellenberechnung

Im folgenden soll ein Satz vorgestellt werden, der es erlaubt, alle Nullstellen einer stetig differenzierbaren Funktion zu finden, sofern die Nullstellenmenge beschränkt ist. Im Gegensatz zu dem gebräuchlichen Newton-Verfahren werden keine weiteren Voraussetzungen benötigt.

## Satz:

Sei  $f$  eine stetig differenzierbare Funktion  $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c$  eine obere Schranke für  $|f'|$ .

Setzt man  $x_0 = a$  und  $x_{i+1} = x_i + |f(x_i)|/c$ , so konvergiert die Folge  $(x_i)$  genau dann gegen eine Zahl  $x$ , wenn  $f$  in  $[a,b]$  eine Nullstelle besitzt.  $x$  ist dabei die kleinste Nullstelle in  $[a,b]$ .

Beweis:

1) Konvergiert die Folge gegen eine Zahl  $x$ , so folgt aus der Stetigkeit von  $f$   $x = x + |f(x)|/c$ , also  $f(x) = 0$ .

2) Ist  $x$  eine Nullstelle in  $[a,b]$ , so gilt trivialerweise  $x_0 \leq x$ .

Es gelte für ein  $i$   $x_i \leq x$ . Nach dem Mittelwertsatz gibt es eine Zahl  $z$  in  $[a,b]$  mit

$$f(x_i) = f(x) + f'(z)(x_i - x).$$

Man erhält

$$|f(x_i)| \leq c(x - x_i) \text{ und } x_{i+1} = x_i + |f(x_i)|/c \leq x.$$

Als monotone, beschränkte Folge konvergiert  $(x_i)$  gegen eine Zahl  $y \leq x$ , die nach 1) Nullstelle von  $f$  ist. War  $x$  die kleinste Nullstelle, so folgt  $x = y$ .

Der Satz gestattet das Auffinden der kleinsten Nullstelle in einem Intervall. Dadurch daß man das Intervall so verkleinert, bis es die erste Nullstelle nicht mehr enthält, kann man auf die gleiche Weise die zweitkleinste Nullstelle finden und ähnlich mit der Zeit die restlichen Nullstellen im Intervall. Der  $c$ -Wert kann dabei beibehalten werden, da  $c$  nur eine obere Schranke für die Ableitung sein muß.

Da das Verfahren außer der stetigen Differenzierbarkeit keine weiteren Voraussetzungen benötigt, ist es ideal bei der Bestimmung aller Nullstellen einer Funktion. Es kann sehr einfach in ein Computer-Programm umgesetzt werden. Die im Verfahren konstruierten Folgen konvergieren allerdings langsamer als beim bekannten Newton-Verfahren.

Das Verfahren wurde neben anderen interessanten Features in einem Analysis-Programm des Cornelsen-Verlages realisiert (Verfasser: Kuypers, Höffgen, Uhlenbrok).