

Chaostheorie/Fraktale I

Die Chaostheorie beschäftigt sich mit Folgen, deren Verhalten auf die Dauer nicht vorhersagbar ist.

Im folgenden bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{N}$ die der natürlichen Zahlen, A, B Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ (z.B. 1,2), wenn nicht anders festgelegt.

Eine **FUNKTION** ist eine Menge M von Paaren (x, y) mit x aus einer Menge A und y aus einer Menge B , so dass es zu jedem x aus A genau ein Paar (x, y) aus M gibt.

Die Menge A heißt Definitionsmenge, B Wertebereich.

Insbesondere ist der Wert y durch x eindeutig bestimmt. y wird Funktionswert genannt und mit $f(x)$ bezeichnet, um die Abhängigkeit von x darzustellen. x wird Argument zu y genannt.

Eine Funktion $f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y = f(x)\}$ wird vielfach durch die Schreibweise $f: A \rightarrow B, x \rightarrow f(x)$ dargestellt.

Ist A eine Menge, so ist **$f(A)$** die **Menge aller Funktionswerte** $f(x)$ mit $x \in A$.

Beispiele:

1)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow 2 \cdot x$ steht anstelle $f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y = 2 \cdot x\}$.

Es gilt $f(2) = 4$ bzw. $2 \rightarrow 4$
 $f(5) = 10$ $5 \rightarrow 10$.

2)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2$ steht anstelle $f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y = x^2\}$.

Es gilt $f(3) = 9$ bzw. $3 \rightarrow 9$
 $f(5) = 25$ $5 \rightarrow 25$.

Sind $f: A \rightarrow B, x \rightarrow f(x)$ und $g: B \rightarrow C, x \rightarrow g(x)$ Funktionen, so definiert man als **VERKETTUNG** $\text{gof}: A \rightarrow C, x \rightarrow g(f(x))$.

Die Verkettung entsteht durch "Einsetzen" von f in g .

Beispiele:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow 2x$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2$
 $\text{gof}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow (2x)^2$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x+3$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow 4^x + 5$
 $\text{gof}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow 4^{x+3} + 5$

Die Verkettung ist allgemein nicht kommutativ, d.h. fog ist nicht immer mit gof identisch.

Für eine Funktion $f: A \rightarrow A$ wird definiert f^n als fofo...of .
| - n-mal - |

Eine **FOLGE** (a_i) ist definiert als eine Funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, i \rightarrow a_i$, also als eine Funktion mit den natürlichen Zahlen als Argumente.

Der Funktionswert zu einer Zahl i heißt **i -tes FOLGENGLIED**, i selbst **INDEX**.

Beispiel:

$(2 \cdot i)$ definiert die Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, i \rightarrow 2 \cdot i$.

Das 2. Folgenglied ist $a_2 = 2 \cdot 2 = 4$, das 3. Glied $a_3 = 2 \cdot 3 = 6$.

Ist f eine Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (a_i) eine Folge mit $a_{i+1} = f(a_i)$, so nennt man die Folge **REKURSIV**.

Beispiel:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 \cdot x$. Eine rekursive Folge erhält man, wenn man für a_1 z.B. den Wert 1 wählt und für alle i a_{i+1} festlegt durch $f(a_i)$. Es gilt dann $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$, $a_3 = 2 \cdot a_2 = 4$, $a_4 = 2 \cdot a_3 = 8$.

Satz:

Für eine mittels einer Funktion f rekursiv definierten Folge gilt $a_{i+1} = f^i(a_1)$.

Ein Argument x heißt **FIXPUNKT** einer Funktion f , wenn $f(x) = x$ gilt. Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

x ist ein Fixpunkt genau dann, wenn der Graph zu f die Gerade $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ (Winkelhalbierende) in x schneidet.

x heißt **PERIODISCHER PUNKT** zu f mit der **Periode n** , wenn $f^n(x) = x$ gilt.

n heißt dann **MINIMAL** zu x , wenn $f^i(x) \neq x$ für alle $i < n$ gilt.

Allgemein heißt eine Menge M **INVARIANT** zu Funktionen $f_1, \dots, f_n: S \rightarrow S$, wenn $S = \bigcup f_i(S)$ ist (Vereinigung aller $f_i(S)$).

Beispiel:

Die Funktion $f: x \mapsto a \cdot x \cdot (1-x)$ (Verhulst-Funktion) besitzt je nach Größe von a periodische Punkte mit der Periode 1, 2, 4, 8 usw. oder verhält sich chaotisch. Die periodischen Punkte sind Attraktoren zu f (vgl. unten).

Satz:

x ist genau dann n -periodisch, wenn x Fixpunkt der Funktion f^n ist.

Satz:

- 1) Ist x n -periodisch zu f , so ist $f^i(x)$ für alle $0 < i < n$ n -periodisch.
- 2) Ist n bzgl. x minimal, so ist n bzgl. allen $f^i(x)$ mit $0 < i < n$ minimal.
- 3) Ist n bzgl. x minimal, so gilt $f^i(x) \neq f^j(x)$ für alle $0 < i, j < n$ mit $i \neq j$.

Beweis:

$$1) f^n \circ f^i(x) = f^{n+i}(x) = f^i \circ f^n(x) = f^i(x)$$

$$2) \text{ Gilt für ein } j < n \text{ } f^j \circ f^i(x) = f^i(x), \text{ dann folgt } x = f^{n-i} \circ f^i(x) = f^{n-i} \circ f^j \circ f^i(x) = f^j \circ f^{n-i} \circ f^i(x) = f^j \circ f^n(x) = f^j(x), \text{ also } j=n, \text{ da } n \text{ minimal bzgl. } x \text{ ist.}$$

$$3) \text{ Ann.: Es gebe } 0 < i < j < n \text{ mit } f^i(x) = f^j(x)$$

Es folgt $x = f^{n-j} \circ f^j(x) = f^{n-j} \circ f^i(x) = f^{n-j+i}(x) \Rightarrow n-j+i \geq n \Rightarrow i \geq j$ im Widerspruch zu $i < j$.

Allgemein nennt man die Menge $K(a, r) = \{x \mid d(x, a) < r\}$ eine **KUGEL** um a mit **RADIUS r** , kurz **r -UMGEBUNG**. Dabei ist $d(x, a)$ der **ABSTAND** von x zu a . Eine Menge, die eine Kugel um einen Punkt a enthält, heißt **UMGEBUNG von a** . Eine **UMGEBUNG einer Menge M** ist Umgebung zu jedem $a \in M$.

Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ heißt **BESCHRÄNKT**, wenn M in einer genügend großen Kugel enthalten ist. Eine Folge ist beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.

Satz:

Zu jeder beschränkten Folge gibt es eine konvergente Teilfolge.

Beweisidee:

Da die Folge komplett in einer großen Kugel enthalten ist, lässt sie sich mit endlich vielen Kugeln mit $r=10^{-1}$ überdecken. In mindestens einer der Kugeln müssen unendlich viele Folgenglieder liegen. Eine dieser Kugeln überdecke man mit endlich vielen Kugeln mit $r=10^{-2}$. Unter diesen Kugeln gibt es wieder eine mit unendlich vielen Folgengliedern. Fährt man fort, so erhält man eine Kugelfolge, die sich in einem Punkt a zusammenzieht. Wählt man zu jeder dieser Kugeln ein Glied der Ausgangsfolge, so entsteht eine gegen a konvergente Teilfolge.

Ist A eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so heißt eine Funktion $f: A \rightarrow A$ **KONTRAKTION**, wenn es eine Zahl $0 \leq r < 1$ gibt mit $d(f(a), f(b)) \leq r \cdot d(a, b)$ für alle a, b aus A .

Beispiele für Kontraktionen sind Ähnlichkeitsabbildungen mit einem Streckungsfaktor unter 1. Nach dem Mittelwertsatz sind differenzierbare Funktionen $A \rightarrow A$ mit $A \subset \mathbb{R}$ Kontraktionen, wenn der Betrag der Ableitung kleiner als ein $r < 1$ ist. Insbesondere ist die Verhulst-Funktion $f: [0,1] \rightarrow [0,1], x \rightarrow a \cdot x \cdot (1-x)$ für Zahlen a mit $|a| < 1$ eine Kontraktion, da für $f'(x) = a \cdot (1-2x)$ $|1-2x| \leq 1$ wird.

Satz:

Ist f eine Kontraktion und (x_i) eine konvergente Folge mit Grenzwert x , so gilt $\lim f(x_i) = f(x)$.

Beweis:

Wegen $d(f(x_i), f(x)) \leq d(x_i, x)$ nähert sich der Abstand von $f(x_i)$ zu $f(x)$ der Zahl 0 an, wenn sich x_i an x annähert.

Satz:

Ist K eine Kugel und $f: K \rightarrow K$ eine Kontraktion, so hat f in K genau einen Fixpunkt.

Beweis:

Man wähle ein $x' \in K$ und bilde die Folge $x_i = f^i(x')$. Dann gibt es eine Teilfolge, die gegen ein x aus K konvergiert.

Ist R der Radius der Kugel K , so gilt für alle i $d(x_i, f(x_i)) = d(f^i(x'), f^{i+1}(x')) \leq r^i d(x', f(x')) = r^i 2R$. Wird i größer, nähert sich der Abstand von x_i und $f(x_i)$ an 0 an. Aus $\lim x_i = x$ folgt $\lim f(x_i) = x$ und aus dem letzten Satz $f(x) = x$.

Sind x, y Fixpunkte zu f , so erhält man aus $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq r d(x, y)$ $(1 - r) d(x, y) \leq 0$ und wegen $1 - r > 0$ $d(x, y) = 0$ bzw. $x = y$.

Interessante graphische Anwendungen für Kontraktionen eröffnen sich mit der nächsten Satzfolge: Dazu geben man einer Kugel K Kontraktionen $f_i: K \rightarrow K$ vor. Nach dem letzten Satz gibt es zu f_1 einen Fixpunkt x . Man sammle dann in der Menge **S'** alle Kombinationen von Funktionswerten, die dadurch entstehen, dass man $f_1, \dots, f_n$ in beliebiger Reihenfolge und Anzahl auf x anwendet.

Satz:

S' ist invariant.

Beweis:

Ist $x' = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(x)$ ein beliebiges Element aus S' , so gehört nach Definition auch $f_i(x') = f_i \circ f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(x)$ zu S' . Es folgt $f_i(S') \subset S'$, insgesamt $\bigcup f_i(S') \subset S'$. Umgekehrt gehört $x' = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(x) = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k} \circ f_1(x)$ zu $f_{i_1}(S')$. Folglich gilt auch $S' \subset \bigcup f_i(S)$.

Eine Menge A heißt **ABGESCHLOSSEN**, wenn A auch alle Grenzwerte zu Folgen aus A enthält. Zu jeder Menge kann man den **ABSCHLUSS** cA bilden, indem man zu A noch die Grenzwerte hinzunimmt.

Satz:

cA ist abgeschlossen.

Beweis:

Ist (x_i) eine gegen ein x konvergente Folge aus cA , so gibt es zu jedem i eine Folge (x_{j_i}) , die gegen x_i konvergiert. Man wähle zu $i=1$ ein k_1 mit $d(x_1, x_{k_1}) < 2^{-1}$, zu $i=2$ ein k_2 mit $d(x_2, x_{k_2}) < 2^{-2}$ usw.. Die Folge $(y_i) = (x_{k_i})$ hat dann als Grenzwert ebenfalls x , da die y_i mit wachsendem i immer näher an x_i rücken. Da die y_i zu A gehören, gehört x zu cA .

Satz:

Ist S invariant und beschränkt, so ist es auch cS .

Beweis:

Ist x aus cS , so gibt es eine Folge (x_i) aus S mit $\lim x_i = x$. Da S invariant ist, gehört für ein beliebiges j $f_j(x_i)$ zu S , folglich $f_j(x) = \lim f_j(x_i)$ zu cS , somit $\bigcup f_j(cS) \subset cS$.

Andererseits gehört jedes x_i zu einem $f_j(S)$. Da die Folge aus unendlich vielen

Gliedern besteht, aber nur endlich viele Funktionen f_i zur Verfügung stehen, gehören unendlich viele x_i zu dem gleichen $f_j(S)$. Wählt man diese x_i aus, so erhält man eine Teilfolge, die immer noch gegen x konvergiert. Jedes x_i lässt sich mit einem geeigneten y_i aus S als $f_j(y_i)$ aufschreiben. Da S beschränkt ist, gibt es zu (y_i) eine konvergente Teilfolge (z_i) . Bezeichnet z den Grenzwert, so gehört z zu cS . Da $(f_j(z_i))$ gegen $f_j(z)$ und gleichzeitig gegen x konvergiert, folgt $x=f_j(z)$. x gehört somit zu $f_j(cS)$, und cS ist Teilmenge von $U f_i(cS)$.

Bildet man zu der oben definierten Menge S' den Abschluss $S=cS'$, so ist S invariant und abgeschlossen. S enthält zumindest den Fixpunkt zu der Kontraktion f_1 , ist also nicht leer.

Ist A eine Menge, x ein Punkt, so sei $d(x,A)$ der kleinste **ABSTAND von x zu Punkten a aus A** .

Satz:

Ist A abgeschlossen und beschränkt, so gibt es zu jedem x ein $a \in A$ mit $d(x,A) = d(x,a)$. Ist insbesondere $d(x,A) = 0$, so gehört x zu A .

Beweis:

Es gibt zu x eine Folge (a_i) in A mit $d(x,a_i) \rightarrow d(x,A)$. Aufgrund der Voraussetzung lässt sich (a_i) durch eine konvergente Teilfolge ersetzen. Ist a der Grenzwert, so folgt $d(x,a_i) \rightarrow d(x,a)$ und daraus $d(x,a)=d(x,A)$.

Ist $d(x,A) = 0$, so folgt $d(x,a) = 0$, also $x = a \in A$.

Sind A und B abgeschlossene Mengen, so sei $d(A,B)$ der größte **Abstand** eines a aus **A zu B** . Man erhält:

Satz:

1) Ist C eine Teilmenge von B , so gilt $d(A,B) \leq d(A,C)$.

2) $d(A,B)$ ist genau dann 0, wenn A Teilmenge von B .

Beweis:

1) Für $a \in A$ erhält man $d(a,B) = \min\{d(a,b) \mid b \in B\} \leq d(a,C)$.

2) Gibt es ein a aus $A \setminus B$, so folgt $0 < d(a,B) \leq d(A,B)$.

Satz:

Ist K eine Kugel und sind $f_i: K \rightarrow K$ Kontraktionen, so gibt es genau eine invariante, abgeschlossene Menge S in K .

Beweis:

Definiert man S' wie oben, so ist der Abschluss $S=cS'$ nach den bisherigen Sätzen invariant und abgeschlossen. Zu zeigen bleibt, dass es nur eine invariante, abgeschlossene Menge gibt:

Es lässt sich eine Zahl $r < 1$ finden mit $d(f_i(x), f_i(y)) = r d(x,y)$ für alle x, y und i .

Seien nun A und B invariante, abgeschlossene Mengen, a aus A . Infolge der Invarianz von A gibt es zu a ein $a' \in A$ und ein f_i mit $f_i(a') = a$. $f_i(B)$ ist eine Teilmenge von B , daraus folgt $d(a,B) = d(f_i(a'), B) \leq d(f_i(a'), f_i(B)) \leq r d(a', B) \leq r d(A,B)$.

Da a beliebig war, erhält man aus $d(a,B) \leq r d(A,B)$ $d(A,B) \leq r d(A,B)$ und somit $(1-r) d(A,B) \leq 0$. Wegen $1-r > 0$ folgt $d(A,B) \leq 0 \Rightarrow d(A,B) = 0 \Rightarrow A \subset B$, da Abstände nicht negativ werden können. Analog erhält man $B \subset A$.

Nach diesem Satz sind invariante, abgeschlossene Mengen eindeutig bestimmt durch die Kontraktionen f_i , unabhängig davon, auf welche Weise die Mengen gefunden werden.

Vorgegeben seien zu einer abgeschlossenen Menge A Kontraktionen $f_i: A \rightarrow A$. Dann gilt $A_1 := \bigcup f_i(A) \subset A$, Wendet man ein f_j auf A_1 an, so erhält man $f_j(A_1) \subset f_j(A)$, also $A_2 := \bigcup f_i(A_1) \subset \bigcup f_i(A) \subset A_1$, allgemein $A_{i+1} := \bigcup f_j(A_i) \subset A_i$ für alle i .

Definiert man A' als den Durchschnitt aller A_i , so gilt:

Satz:

A' ist invariant.

Beweis:

Für jedes i gilt $f_j(A') \subset f_j(A_i) \subset A_i$, also nach Definition $f_j(A') \subset A'$. Ist $x \in A'$, so gibt es zu jedem i ein j mit $x \in f_j(A_i)$. Da es nur endlich viele f_i gibt, findet man ein j und dazu eine Folge (j_i) mit $x \in f_{j_i}(A_{j_i})$. Wählt man eins dieser j_i , so gilt für alle $i > j_i$ wegen $A_{i+1} \subset A_i$ auch $x \in f_{j_i}(A_i)$. Bildet man die Schnittmenge der A_i , so erhält man $x \in f_j(A')$, also insgesamt $A' \subset \bigcup f_j(A')$.

Genutzt werden die letzten beiden Sätze bei der FRAKTALEN BILDKOMPRESSION und, um Eigenschaften des Sierpinski-Dreiecks zu ermitteln (siehe unten).

Sind die f_i umkehrbare Kontraktionen $S \rightarrow f_i(S)$, S dabei wie oben definiert, so heißt S **SELBSTÄHNLICH**. Durch mehrmaliges Anwenden der f_i erhält man immer kleinere Bildmengen von S , die wegen der Invertierbarkeit bis auf Verzerrungen wie S aussehen und insgesamt wieder S bilden (vgl. letzten Satz). Mengen mit dieser Eigenschaft zählen vielfach zu den **FRAKTALEN**.

Ein Beispiel für invariante Mengen ist die Menge aller n -periodischen Punkte zu einer Funktion f , da das Anwenden von f die Menge nicht verändert (siehe oben: $f^i(x)$ ist mit x n -periodisch!). Ist zudem n minimal, so ist die Anzahl der Elemente dieser Menge ein Vielfaches von n (vgl. oben).

Anwendung (**FRAKTALE KOMPRESSION**):

Ist A eine beschränkte, "schöne" Punktmenge in der Ebene, so lässt sich A in ein großes Quadrat einbetten. Gleichzeitig lässt sich A mit kleinen Quadraten überdecken. Wählt man als Kontraktionen Kombinationen aus zentrische Streckungen und Verschiebungen, die jeweils aus dem großen Quadrat eins der kleinen produzieren, so lässt sich erreichen, dass die zu diesen Funktionen invariante Menge S die Menge A "gut" annähert.

Um A rekonstruieren zu können, benötigt man nur die Kenntnis der Kontraktionen, über die sich S rekonstruieren lässt.

Bilder lassen sich dann übertragen, indem man die Kontraktionen durch geeignete math. Ausdrücke beschreibt und diese dann überträgt. Meistens benötigen die Kontraktionen deutlich weniger Übertragungs-kapazität als das Originalbild, auch wenn dieses mit einem anderen Verfahren komprimiert wurde. Allerdings ist der Zeitaufwand zur Analyse und Rekonstruktion eines Bildes sehr hoch.

Eine **Folge** (x_i) wird **von $f_1, \dots, f_k$ aus x erzeugt**, wenn es zu jedem i eine Verkettung von $f_{i1}, \dots, f_{ik}$ gibt mit $x_{i+1} = f_{i1} \circ \dots \circ f_{ik}(x_i)$ und $x_1 = x$. Man nennt eine abgeschlossene, zu $f_1, \dots, f_k$ invariante Menge M einen **ATTRAKTOR**, wenn es eine Umgebung O von M gibt mit: Zu jedem $\epsilon > 0$ und jeder Folge (x_i) , die von den f_i aus einem $x \in O$ erzeugt wurde, existiert ein n mit $d(x_i, M) < \epsilon$ für alle $i \geq n$.

Eine abgeschlossene, zu $f_1, \dots, f_k$ invariante Menge M ist ein **REPELLER**, wenn es eine Umgebung O von M gibt mit: Zu jeder von den f_i aus einem $x \in O \setminus M$ erzeugten Folge (x_i) existiert ein i mit $x_i \notin O \setminus M$.

Satz:

Vorgegeben seien Kontraktionen $f_1, \dots, f_n: K \rightarrow K$ und eine zu den f_i invariante, abgeschlossene Menge M . M ist dann ein Attraktor.

Beweis:

Man wähle ein $r < 1$ mit $d(f_i(x), f_i(y)) \leq r d(x, y)$ für alle i und $x, y \in K$. Es folgt $d(f_{i1} \circ \dots \circ f_{ik}(x), f_{i1} \circ \dots \circ f_{ik}(y)) \leq r^k d(x, y)$ für alle $x, y \in K$ und i, j mit $1 \leq k$. Man wähle ein $x_1 \in K$ und $y_1 \in M$. Man erzeuge beginnend mit x_1 mittels der f_i eine Folge (x_i) und beginnend mit y_1 auf gleiche Weise eine Folge (y_i) . Man erhält für alle i $d(x_{i+1}, y_{i+1}) = d(f_{i1} \circ \dots \circ f_{ik}(x_i), f_{i1} \circ \dots \circ f_{ik}(y_i)) \leq r^k d(x_i, y_i) \leq r d(x_i, y_i)$ wegen $r^k \leq r$, also $d(x_{i+1}, M) \leq d(x_{i+1}, y_{i+1}) \leq r^i d(x_1, y_1)$. Wählt man $i > \log_r \epsilon$, so folgt $d(x_{i+1}, M) < \epsilon$.

Satz:

Seien M ein Repeller zu $f_1, \dots, f_k$ und O eine entsprechend der Repeller-Definition passende Umgebung, ferner (x_i) eine von den f_i aus einem $x \in O \setminus M$ erzeugte Folge.

Dann gibt es ein n mit $x_i \notin O$ für alle $i \geq n$ oder $x_i \in M$ für alle $i \geq n$.

Beweis:

Sei (x_i) eine von den f_i aus einem $x \in O \setminus M$ erzeugte Folge, so dass es kein n gibt mit $x_i \notin O$ für alle $i \geq n$. Dann existiert zu jedem n ein $i \geq n$ mit $x_i \in O$. Liegt eins dieser x_i in M , so gehören wegen der Invarianz von M auch alle x_j mit $j \geq i$ zu M . Alternativ lässt sich eine Teilfolge (y_i) bestimmen mit $y_i \in O \setminus M$ für alle i . Da die Folge von den f_i erzeugt wird, muss es nach der Repeller-Definition ein i geben mit $y_i \notin O \setminus M$. Widerspruch!

Zu jedem Repeller M gibt es demnach einen Ring um M , der von jeder von den f_i erzeugten Folge irgendwann verlassen wird.

Ob ein Fixpunkt x einer stetig differenzierbaren Funktion f auf $A \subset \mathbb{R}$ ein Attraktor oder Repeller ist, lässt sich über den Mittelwertsatz aus der Größe von $|f'(x)|$ ableiten:

Ist $|f'(x)| < 1$, so gibt es eine Kugel K um x und ein $r < 1$ mit $|f'| \leq r$ auf K . f ist auf K eine Kontraktion, deren Fixpunkt x nach dem vorletzten Satz ein Attraktor ist.

Ist $|f'(x)| > 1$, so gibt es eine Kugel K um x und ein $r > 1$ mit $|f'| \geq r$ auf K . Zu jedem $y \in K$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $z \in K$ mit $f(y) - x = f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$, also $|f(y) - x| \geq r|y - x|$. Rekursiv folgt für ein n , wenn alle $f^i(x)$ mit $i \leq n$ zu K gehören, $|f^n(y) - x| \geq r^n|y - x|$. Da r^n mit n unbegrenzt anwächst, muss es ein i geben mit $f^i(y) \notin K$. Somit ist $\{x\}$ ein Repeller.

Eine Menge M wird als **FRAKTAL** bezeichnet, wenn seine **Dimension nicht ganzzahlig** ist. Dazu muss „Dimension“ neu definiert werden:

Man überdecke eine n -dimensionale Menge M (Linie, Fläche, Körper) vollständig mit möglichst wenigen Würfeln der Kantenlänge r und bestimme deren Anzahl z . Ist V das zur Dimension von M passende Maß, wie Länge, Fläche oder Volumen, so nähert $z \cdot r^n$ um so besser an V an, je kleiner r ist. Es gilt also $z \cdot r^n \approx V$ bzw. $\log z + n \cdot \log r \approx \log V \Rightarrow n = \log V / \log r - \log z / \log r$. Verkleinert man r , so nähert sich $\log r$ an $-\infty$ an, z wächst entsprechend, während $\log V / \log r$ sich 0 nähert.

Man definiert nun die **fraktale Boxdimension** als den **Grenzwert von $-\log z / \log r$** für $r \rightarrow 0$. Wie die Überlegungen oben zeigen, stimmt für Linien, Flächen und Körper dieser Dimensionsbegriff mit dem klassischen aus der lin. Algebra überein.

Chaostheorie/Fraktale II

Eine Funktion $f: A \rightarrow A$ hat **CHAOTISCHES VERHALTEN**, wenn gilt:

1) Zu je drei Umgebungen O_0, O_1, O_2 gibt es Elemente x_1, x_2 aus O_0 und eine Zahl n , so dass $f^n(x_1)$ zu O_1 und $f^n(x_2)$ zu O_2 gehört.

(**Sensitivität**: f reißt Elemente auseinander und verteilt sie auf ganz A)

2) Zu jeder Umgebung O gibt es ein Element x und eine Zahl n mit $f^n(x) \in O$.

(**Periodizität**: O verodet durch f nicht)

Im folgenden sei die **SÄGEZAHNFUNKTION s** auf $A = [0, 1]$ definiert durch $s(x) = 2x$ für alle $x < 0.5$ und $s(x) = 2x - 1$ für alle übrigen x .

Wird x im Dualsystem dargestellt, so verschiebt s die Dezimalen um eine Position nach links und setzt die Einer-Stelle auf 0.

Satz:

In jedem Intervall $]a, b[$ in $[0, 1]$ lassen sich Zahlen $c < d$ finden, die im Dualsystem höchstens endlich viele Dezimalen haben und sich nur in der letzten Dezimale unterscheiden.

Beweis:

Ein allgemeiner Beweis ist schwer verständlich. Die Grundgedanken sollen daher durch ein Beispiel veranschaulicht werden:

Wegen $a < b$ gibt es eine Dezimale, die bei a den Wert 0 und bei b den Wert 1 hat. Z.B. könnte a mit 0,10110.. und b mit 0,10111.. anfangen.

a muss in einer späteren Dezimale den Wert 0 haben: Wäre dies nicht der Fall, also $a = 0,1011011111\dots$, so lässt sich a auch durch 0,10111 darstellen und hätte dann nicht in der 5. Dezimale einen anderen Wert als b .

Man wähle c in den ersten Dezimalen identisch mit a bis zu der eben gefundenen 2. Null und ersetze diese durch eine 1. Die restlichen Dezimalen von a lasse man fort. c ist dann größer als a , aber kleiner als b .

In unserem Beispiel ist $c = 0,10110111$, wenn a in der 8. Dezimale eine 0 hatte.

Man wähle d wie c , hänge aber noch eine 1 an. d ist dann größer als c . Da d in den ersten Dezimalen mit b übereinstimmt, dann aber wie a eine 0 hat, während b eine 1 hat, ist d kleiner als b . $]c, d[$ liegt insgesamt in $]a, b[$.

Satz:

Wählt man zu $]a, b[$ die Zahlen c und d wie im letzten Satz, so gehört eine Zahl x genau dann zu $[c, d]$, wenn x mit den Dezimalen von c beginnt (inkl. einer abschließenden 0) und dann mit einer beliebigen Folge von 0 und 1 fortsetzt.

Beweis:

Ist die zweite Eigenschaft erfüllt, so gilt $x \geq c$. Da die letzte Dezimale von c eine 0 ist, während dort d eine 1 aufweist, gilt auch $x \leq d$.

Die andere Beweisrichtung ist trivial.

Satz:

s zeigt chaotisches Verhalten.

Beweis:

1) Die Umgebungen O_i lassen sich nach dem vorletzten Satz jeweils zu $[c_i, d_i]$ verkleinern, wobei sich c_i und d_i im Dualsystem nur in der letzten Dezimale unterscheiden. Man wähle x_1 als die Zahl, die mit den Dezimalen von c_0 beginnt (inkl. letzter 0) und mit den Dezimalen von c_1 fortsetzt.

Ist z.B. $c_0 = 0,10110$ und $c_1 = 0,110110$, so ist $x_1 = 0,10110110110$.

Sei n die Anzahl der Dezimalen von c_0 inkl. letzter 0. Wendet man s n -mal auf x_1 an, so verschwinden die Dezimalen von c_0 . $s^n(x_1)$ ist somit c_1 und gehört zu U_1 .

Entsprechend verfähre man mit x_2 . Indem man nach den Dezimalen von c_0 genügend viele Nullen in x_1 und x_2 einschiebt, kann man für x_1, x_2 das gleiche n verwenden. Damit ist s sensitiv.

2) O verkleinere man nach dem vorletzten Satz zu $[c, d]$, wobei sich c und d nur in der letzten Dezimale unterscheiden. x lege man als periodische Zahl fest, deren Periode gerade aus den Dezimalen von c (inkl. letzter 0) besteht. x gehört zu $[c, d]$ und damit zu O . Ist n die Zahl der Dezimalen von c inkl. letzter Null, so folgt analog zu 1) $s^n(x) = x$, also die Periodizität von s .

Es sei die **HUTFUNKTION** h auf $A = [0, 1]$ definiert durch $h(x) = 2x$ für alle $x < 0.5$ und $h(x) = 2 - 2x$ für alle übrigen x .

Satz:

1) Es gilt $h \circ s = h \circ h$.

2) Es gilt $h \circ s^n = h^{n+1}$ für alle $n \geq 1$.

Beweis:

1) Ist $x < 0.5$ so wird $s(x) = h(x)$, also $h \circ s(x) = h \circ h(x)$.

Ist $x > 0.5$, so wird $s(x) = 2x - 1$. Ist $s(x) < 0.5$, so wird $h \circ s(x) = 2(2x - 1) = 4x - 2$.

$h(x)$ ergibt sich als $h(x) = 2 - 2x > 0.5$, also $h \circ h(x) = 2 - 2(2 - 2x) = 4x - 2$. Ist $s(x) > 0.5$, so gilt $h \circ s(x) = 2 - 2(2x - 1) = 4 - 4x$ und $h(x) = 2 - 2x < 0.5 \Rightarrow h \circ h(x) = 2(2 - 2x) = 4 - 4x$. Für $x = 0.5$ erhält man $h \circ s = h \circ h$ über die Stetigkeit von h .

2) Geht man von $h \circ s^n = h^{n+1}$ für ein n aus, so folgt $h \circ s^{n+1} = h \circ s \circ h^n = h^{n+1} \circ s = h^n \circ h \circ s = h^n \circ h \circ h = h^{n+2}$.

Satz:
 h zeigt chaotisches Verhalten.

Beweis:

Sind U_i Umgebungen in $[0,1]$, so gibt es Umgebungen V_i mit $h(V_i) \subset U_i$.
 In U_0 gibt es x_i und dazu eine Zahl n mit $s^n(x_i) \in V_i$ für $i \in \{1,2\}$, also $h^{n+1}(x_i) = h \circ s^n(x_i) \in h(V_i) \subset U_i$. Man erhält damit die Sensitivität.
 In V_0 gibt es ferner ein x und dazu ein n mit $s^n(x) = x$. Es folgt $h^{n+1}(x) = h \circ s^n(x) = h(x) \in U_0$. Somit ist $h(x)$ ein n -periodischer Punkt in U_0 .

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ heißt **STETIG in $x \in A$** , wenn es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung O von x gibt mit $f(O) \subset V$. f ist **STÜCKWEISE STETIG**, wenn A eine endliche Vereinigung von Mengen A_i ist, so dass f auf jedem A_i stetig ist.

Satz:

Ist $f: A \rightarrow A$ eine Funktion mit chaotischem Verhalten, $t: A \rightarrow A$ umkehrbar und stückweise stetig, so hat $g = t^{-1} \circ f \circ t$ chaotisches Verhalten.

Beweis:

Für alle x gilt $g^n(x) = (t^{-1} \circ f \circ t)^n(x) = t^{-1} \circ f \circ t \circ \dots \circ t^{-1} \circ f \circ t(x) = t^{-1} \circ f^n \circ t(x)$.
 1) Sind U_i Umgebungen in A , so gibt es zu jedem i Umgebungen V_i mit $t^{-1}(V_i) \subset U_i$, dazu $y_i \in V_0$ mit $f^n(y_i) \in V_i$ für $i \in \{1,2\}$. Gegebenenfalls sind die U_i geeignet zu verkleinern, damit sie in den stetigen Abschnitten von t liegen. Definiert man $x_i = t^{-1}(y_i)$, so folgt $x_i \in U_0$ und $g^n(x_i) = t^{-1} \circ f^n(y_i) \in U_i$ wegen $f^n(y_i) \in V_i$, damit die Sensitivität von g .
 2) Zu einer Umgebung O gibt es eine Umgebung V mit $t^{-1}(V) \subset O$, ein y in V und eine Zahl n mit $f^n(y) = y$. Ist $x = t^{-1}(y)$, so gehört x zu O . Man erhält $g^n(x) = t^{-1} \circ f^n(y) = t^{-1}(y) = x$, also die Periodizität von g .

Satz:

Sei $t: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $x \rightarrow (\sin(x \cdot \pi/2))^2$ ist stetig und umkehrbar.

Beweis:

Da die Ableitung auf $[0,1]$ positiv ist, ist t umkehrbar.

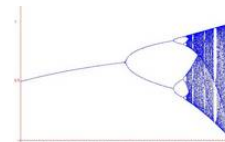
Satz:

Sei t wie oben, $v: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $x \rightarrow 4x(1-x)$. Dann gilt $t \circ h = v \circ t$. Insbesondere zeigt v chaotisches Verhalten.

Beweis:

Man erhält $v \circ t(x) = 4 \sin^2(x \cdot \pi/2) (1 - \sin^2(x \cdot \pi/2)) = 4 \sin^2(x \cdot \pi/2) \cos^2(x \cdot \pi/2) = \sin^2(2x \cdot \pi/2)$.
 Für $x < 0.5$ ergibt sich $t \circ h(x) = \sin^2(2x \cdot \pi/2)$, sonst $t \circ h(x) = \sin^2((2-2x) \cdot \pi/2) = \sin^2(\pi - 2x \cdot \pi/2) = \sin^2(-2x \cdot \pi/2) = \sin^2(2x \cdot \pi/2)$ wegen $\sin(\pi + y) = -\sin(y)$.
 Da $v = t \circ h \circ t^{-1}$ gilt, erhält man das chaotische Verhalten von v aus demjenigen von h .

v ist ein Spezialfall der **VERHULST-FUNKTION** $x \rightarrow a \cdot x \cdot (1-x)$, die Wachstumsvorgänge beschreibt.

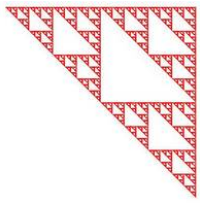


Das SIERPINSKI-DREIECK S ist die invariante Menge zu den folgenden drei Kontraktionen auf $[0,1]^2$:

$$f_1(x,y) \rightarrow (0.5x, 0.5y), \quad f_2(x,y) \rightarrow (0.5x+0.5, 0.5y), \\ f_3(x,y) \rightarrow (0.5x+0.5, 0.5y+0.5)$$

Dass es sich um Kontraktionen handelt, liegt an dem Faktor 0.5 vor den Variablen. S kann man erzeugen, indem man auf ein rechtwinkliges Dreieck mit der Kathetenlänge 1 die drei Funktionen anwendet. Man erhält drei Teildreiecke, auf die man wiederum die Funktionen anwendet. Dadurch setzen sich die Dreiecke jeweils aus drei weiteren Dreiecken zusammen. Führt man das Verfahren unendlich oft durch, so erhält man das Sierpinski-Dreieck, das nach einem Satz im ersten Textteil invariant ist. Das Sierpinski-Dreieck ist selbstähnlich, da die Teil-

dreiecke immer kleiner werden. Wir werden auf zwei verschiedene Weisen versuchen, die Größe von S zu bestimmen.



Dazu berechnen wir zunächst die Gesamtfläche der Teildreiecke in den einzelnen Teilungsschritten. Der Grenzwert dieser Flächen wäre die Fläche von S.

Das Ursprungsdreieck die Fläche $F = 0.5$. Bei jedem Teilungsschritt entstehen drei rechtwinklige Dreiecke mit der halben Seitenlänge wie beim Ausgangsdreieck, deren Fläche somit ein Viertel der Fläche des Ausgangsdreiecks beträgt.

Als Gesamtfläche erhält man daher

nach dem 1. Teilungsschritt $3 \cdot 0.5^2$,
 nach dem 2. Teilungsschritt $3 \cdot 3 \cdot 0.5^3 = 3^2 \cdot 0.5^3$, allgemein
 nach dem i. Teilungsschritt $3^i \cdot 0.5^{2 \cdot i + 1}$.

Wächst i, so nähert sich die Gesamtfläche 0 an. S hat also die Fläche 0 und ist somit keine 2-dimensionale Figur.

Will man die Boxdimension berechnen, so kann man jedes Teildreieck mit einem Quadrat überdecken, das die gleiche Kantenlänge wie die Katheten des Dreiecks hat. Wie oben werden im i. Teilungsschritt zum Überdecken der Teildreiecke 3^i Quadrate mit der Kantenlänge 0.5^i benötigt.

Die Boxdimension ist dann der Grenzwert von

$$-\log 3^i / \log 0.5^i = -\log 3 / \log 0.5 = 1.58 \quad \text{für } i \rightarrow \infty .$$

Damit ist die Dimension 1.58 und S ein Fraktal.

Versucht man übrigens, S eine Länge zuzuordnen, so kann man analog zu oben die Länge über einen Grenzwertprozess annähern und erhält dann ∞ als Länge. Auch dies ein Zeichen, dass S nicht in das bekannte Geometrieschema passt.

Neben der Boxdimension gibt es noch die **Ähnlichkeitsdimension**:

Gibt es zu einer beschränkten Menge M Kontraktionen $f_1, \dots, f_n$ mit $M = \bigcup f_i(M)$, so sei r die kleinste Zahl mit $|f_i(x) - f_i(y)| \leq r|x - y|$ für alle i und alle x, y aus M. Als Ähnlichkeitsdimension wird dann definiert $-\log n / \log r$.

Für das Sierpinski-Dreieck ergibt sich damit $-\log 3 / \log 0.5$, also der gleiche Wert wie bei der Boxdimension. Allerdings ist die Ähnlichkeitsdimension deutlich einfacher zu bestimmen als die Boxdimension.

Allgemein kann man sich die Menge M in einem ersten Schritt in einen Würfel eingebettet vorstellen mit der Kantenlänge s. M setzt sich aus n Bildern $f_i(M)$ zusammen, die dann jeweils in einen Würfel mit der Kantenlänge $r \cdot s$ passen. Die Bilder bestehen wiederum aus n Teilen, eingebettet in Würfeln mit der Kantenlänge $r^2 \cdot s$. Man erhält daher nach

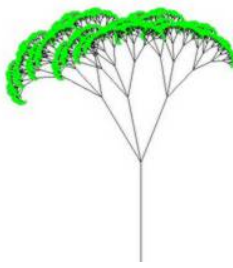
dem 1. Teilungsschritt: n Würfel mit der Länge $r \cdot s$,
 dem 2. Teilungsschritt: n^2 Würfel mit der Länge $r^2 \cdot s$,
 dem i. Teilungsschritt: n^i Würfel mit der Länge $r^i \cdot s$.

Zur Berechnung der Boxdimension betrachte man

$$-\log n^i / \log (r^i \cdot s) = -i \cdot \log n / (i \cdot \log r + \log s) \rightarrow -\log n / \log r \quad \text{für } i \rightarrow \infty .$$

Haben die $f_j(M)$ gemeinsame Elemente, lässt sich M eventuell mit weniger als n^i Würfeln überdecken. In diesem Fall wäre die Boxdimension kleiner als die Ähnlichkeitsdimension. Sonst stimmen beide Werte überein.

Lindenmayer-Grafiken sind Verallgemeinerungen des Sierpinski-Dreiecks: Man geht statt von einem Fixpunkt von einer Figur aus, wendet auf diese endlich viele Kontraktionen an und wiederholt den Vorgang für jedes so entstandene Bild. Nach unendlich vielen Schritten erhält man eine Lindenmayer-Grafik. Z.B. lassen sich



auf diese Weise aus einer Strecke Grafiken erzeugen, die wie Pflanzen aussehen.

Als Beispiel soll eine Grafik betrachtet werden, die dadurch entsteht, dass an eine Strecke der Länge 1 halbiert wird und die so entstandenen Teilstrecken gedreht an das Ende der Ausgangsstrecke gehängt werden (Y-Form!). Die Drehwinkel sollen so groß gewählt werden, dass zur Überdeckung der drei Strecken 3 Würfel mit der Kantenlänge 0.5 benötigt werden. Wiederholt man diesen

Prozess unendlich oft, so erhält man eine Lindenmayer-Grafik.

Die Boxdimension berechnet sich auf folgende Weise:

Wie oben beschrieben, werden für die ersten drei Strecken 3 Würfel der Kantenlänge $1/2$ benötigt, dazu 2 Würfel dieser Größe für den Rest (Summe der restlichen Streckenlängen!). Halbiert man die Kantenlänge der Würfel zu $1/4$, benötigt man für die Ausgangsstrecke 4 Würfel und für die ersten Teilstrecken $2 * 2$ Würfel. Hinzu kommen für die nächsten 4 Teilstrecken jeweils ein Würfel und für den Rest ebenfalls 4 mal 1 Würfel, insgesamt $1*4 + 2*2 + 4*1 + 4*1 = (2 + 2)*2^2$.

Allgemein erhält man für die Kantenlänge 2^{-i} als Würfelzahl $(i+2)*2^i$.

Damit gilt

$$-\log((i+2)*2^i)/\log 2^{-i} = \log(i+2)/(i*\log 2) + \log 2^i / \log 2^i \rightarrow 1 \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Damit ist die Boxdimension dieser Lindenmayer-Grafik 1. Berechnet man allerdings die (Strecken-)Länge der Grafik, so erhält man näherungsweise $i*2^{i-1} * 2^{-i} = i/2$, also ∞ für $i \rightarrow \infty$.

Hat man an den Streckenenden nicht nur jeweils 2 Verzweigungen, sondern 3, so ergibt sich eine andere Situation:

Zum Überdecken mit Würfeln der Kantenlänge $1/2$ benötigt man $2 + 3 + 3$ Würfel, zum Überdecken mit der Kantenlänge $1/4$

$1*4 + 3*2 + 9*1 + 9 = 1*4 + 1,5*4 + 1,5^2*4 + 1,5^2*4 = (1 + 1,5 + 1,5^2 + 1,5^2)*2^2$, allgemein für die Kantenlänge 2^{-i}

$$(1 + 1,5 + \dots + 1,5^i + 1,5^i)*2^i = ((1,5^{i+1} - 1)/0,5 + 1,5^i)*2^i = (4*1,5^i - 2)*2^i.$$

Damit berechnet sich die Boxdimension über

$$\begin{aligned} -\log((4*1,5^i - 2)*2^i)/\log 2^{-i} &< \log 4/(i*\log 2) + \log 1,5^i/\log 2^i + \log 2^i/\log 2^i \\ &= \log 4/(i*\log 2) + \log 1,5/\log 2 + 1 \\ &\rightarrow \log 1,5 / \log 2 + 1 = 1,58 \quad \text{für } i \rightarrow \infty \quad \text{und} \\ -\log((4*1,5^i - 2)*2^i)/\log 2^{-i} &> \log 2/(i*\log 2) + \log 1,5^i/\log 2^i + \log 2^i/\log 2^i \\ &= \log 4/(i*\log 2) + \log 1,5/\log 2 + 1 \\ &\rightarrow \log 1,5 / \log 2 + 1 = 1,58 \quad \text{für } i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Die Boxdimension hat somit den Wert 1,58, die Grafik ist ein Fraktal.

Die Rechnung lässt sich auf Lindenmayer-Grafiken mit mehr Verzweigungen übertragen.

Literatur:

- 1) K.J.Falconer: Fraktale Geometrie 1993 Spektrum-Verlag
- 2) H.-O.Peitgen ea.: Chaos - Ein Arbeitsbuch 1992 Klett-Verlag
- 3) H.-O.Peitgen ea.: Fraktale - Ein Arbeitsbuch 1992 Klett-Verlag